

Sur les applications de Lattès de \mathbb{P}^k *

Tien-Cuong Dinh

February 1, 2008

Abstract

Let f be a polynomial endomorphism of degree $d \geq 2$ of \mathbb{C}^k ($k \geq 2$) which extends to a holomorphic endomorphism of \mathbb{P}^k . Assume that the maximal order Julia set of f is laminated by real hypersurfaces in some open set. We show that f is homogenous and is a polynomial lift of a Lattès endomorphism of \mathbb{P}^{k-1} .

Notations:

- f un endomorphisme de degré $d \geq 2$ vérifiant l'hypothèse du théorème 1.3, g un itéré de degré d_g de f , b un point fixe répulsif de g .
- G la fonction de Green, μ la mesure d'équilibre, J l'ensemble de Julia d'ordre maximal de f .
- φ une application de Poincaré de g en b , $\Lambda := \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$, $G^* := G \circ \varphi$, $\mu^* := \varphi^*(\mu)$, $J^* := \varphi^{-1}(J)$.
- $z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k$, $z' := (z_1, \dots, z_{k-1})$ et $\|z'\|^2 := |z_1|^2 + \dots + |z_{k-1}|^2$.
- Si \mathcal{G} est un groupe d'automorphismes de \mathbb{C}^k et V un sous-ensemble de \mathbb{C}^k , on note $\mathcal{G}|_V := \{\tau|_V \text{ avec } \tau \in \mathcal{G} \text{ vérifiant } \tau(V) = \tau^{-1}(V) = V\}$.

***Classification mathématique:** 30D05, 58F23.

Mots clés: application de Lattès, ensemble de Julia, courant de Green.

1 Introduction

Dans [14], Lattès a construit des fractions rationnelles semi-conjuguées à des isogénies dilatantes d'un tore complexe. L'ensemble de Julia d'une telle fraction remplit la sphère de Riemann et sa mesure d'équilibre est lisse en dehors d'un ensemble fini.

En dimension quelconque, Berteloot et Loeb ont caractérisé les applications de Lattès de \mathbb{P}^k par le fait que leurs courants de Green sont lisses et strictement positifs dans un certain ouvert [4]. Notons ici qu'en dimension 1, les notions de mesure d'équilibre et de courant de Green sont coïncides. Rappelons la définition d'applications de Lattès donnée par Berteloot et Loeb:

Définition 1.1 Un endomorphisme holomorphe f de degré $d \geq 2$ de \mathbb{P}^k est appelé *application de Lattès*, s'il existe un groupe d'isométries complexes discret, co-compact \mathcal{A} de \mathbb{C}^k , une application affine Λ_f de partie linéaire $\sqrt{d}\tau$ (τ unitaire) ainsi qu'un revêtement ramifié $\varphi : \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{P}^k$ tels que $f \circ \varphi = \varphi \circ \Lambda_f$ et \mathcal{A} agisse transitivement sur les fibres de φ .

Dans [9], en étudiant les endomorphismes permutables de \mathbb{P}^k , nous avons introduit et étudié une classe d'endomorphismes dont la fonction de Green, la mesure d'équilibre et l'ensemble de Julia sont laminés. Cette classe contient également les relevés polynomiaux des applications de Lattès. Les relations étroites entre les fractions de Lattès et l'étude des fonctions permutables ont été éclairées par Eremenko dans un travail antérieur [10] (*voir également* [11, 13, 15]).

Dans ce présent article, nous nous intéressons à des endomorphismes polynomiaux dont l'ensemble de Julia d'ordre maximal est, dans un certain ouvert, laminé par des hypersurfaces réelles. Nous allons prouver que ces endomorphismes sont homogènes et leurs restrictions à l'hyperplan à l'infini sont des applications de Lattès, c'est-à-dire qu'ils sont des relevés polynomiaux des applications de Lattès. Dans un cas particulier (pour les applications polynomiales homogènes de \mathbb{C}^{k+1} dont l'ensemble de Julia d'ordre maximal est, dans un certain ouvert, une hypersurface réelle strictement pseudoconvexe) on obtient la caractérisation des applications de Lattès mentionnée ci-dessus. Par même méthode, nous pouvons sans doute étendre notre étude au cas où l'ensemble de Julia d'ordre maximal est, dans un certain ouvert, une variété réelle de petite codimension.

Pour faciliter la lecture, nous allons rappeler quelques notions fondamentales de la théorie des systèmes dynamiques holomorphes en plusieurs variables et résumer certaines propriétés utiles pour cet article. Le lecteur trouve des exposés détaillés dans [18, 12, 2].

Notons $\pi : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^k$ la projection canonique. Soit f un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$ de \mathbb{P}^k . On note f^s l'itéré s -ième de f . Un *relevé* de f est un endomorphisme polynomial homogène de \mathbb{C}^{k+1} vérifiant $\pi \circ F = f \circ \pi$. On appelle *fonction de Green* de f la fonction G_f qui est définie par

$$G_f(z) := \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{d^s} \log \|F^s(z)\|.$$

C'est une fonction continue plurisousharmonique de $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ vérifiant $G_f \circ F = dG_f$ et $G_f(\lambda z) = \log |\lambda| + G_f(z)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On peut définir un courant positif fermé de bidegré $(1, 1)$ T de \mathbb{P}^k tel que $\pi^*T = dd^c G_f$. Ce courant s'appelle *courant de Green*. La *mesure d'équilibre* μ de f est définie par $\mu := T^k$. C'est la seule mesure de probabilité invariante par f ($f^*\mu = d^k\mu$) qui ne charge pas les ensembles pluripolaires. Plus précisément, on a

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{d^{ks}} \sum_{f^s(z)=a} \delta_z = \mu$$

pour tout a n'appartenant pas à un certain ensemble exceptionnel pluripolaire. La notation δ_z désigne la masse de Dirac en z . Le support J de μ s'appelle *l'ensemble de Julia d'ordre maximal* de f . Cet ensemble n'est pluripolaire dans aucun ouvert qui le rencontre. Si U est un ouvert rencontrant J alors $\bigcup_{s \geq 1} f^s(U)$ est un ouvert de complémentaire pluripolaire de \mathbb{P}^k . Briend-Duval ont prouvé que l'ensemble des points périodiques répulsifs de f est dense dans J [6].

Lorsque f est de plus un endomorphisme polynomial de \mathbb{C}^k , on utilise la *fonction de Green* définie par

$$G(z) := \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{d^s} \log^+ \|f^s(z)\|$$

où $\log^+(z) := \max(0, \log(z))$. Cette fonction de Green est également continue, plurisousharmonique et à croissance logarithmique quand $z \rightarrow \infty$. Le courant de Green défini ci-dessus est égal à $dd^c G$. L'ensemble de Julia J est contenu dans le bord du compact $\{G = 0\}$. Le compact $\{G = 0\}$ s'appelle *ensemble de Julia rempli*. Notons que la fonction de Green, le courant de

Green, la mesure d'équilibre et l'ensemble de Julia de f^s sont égaux à ceux de f pour tout $s \geq 1$.

Définition 1.2 On dit qu'au voisinage d'un point a l'ensemble J est *laminé par des hypersurfaces réelles de classe \mathcal{C}^α* s'il existe un système de coordonnées réelles (x_1, \dots, x_{2k}) de classe \mathcal{C}^α d'un voisinage V de a et un fermé $K \subset \mathbb{R}$ tels que $J \cap V = \{(x_1, \dots, x_{2k}) \text{ avec } x_{2k} \in K\} \cap V$. On dit que dans un ouvert U , l'ensemble J est *laminé par des hypersurfaces réelles de classe \mathcal{C}^α* s'il est au voisinage de tout point de U .

Notre résultat principal est le théorème suivant:

Théorème 1.3 *Soit f un endomorphisme polynomial de degré $d \geq 2$ de \mathbb{C}^k qui se prolonge en endomorphisme holomorphe de \mathbb{P}^k ($k \geq 2$). Supposons que dans un ouvert de \mathbb{C}^k l'ensemble de Julia d'ordre maximal de f soit non vide et soit laminé par des hypersurfaces réelles de classe $\mathcal{C}^{2+\epsilon}$ ($0 < \epsilon < 1$). Alors pour un système de coordonnées convenable de \mathbb{C}^k , f est homogène. De plus, la restriction de f à l'hyperplan $\mathbb{P}^k \setminus \mathbb{C}^k \simeq \mathbb{P}^{k-1}$ est une application de Lattès.*

Remarque 1.4 L'ensemble de Julia d'ordre maximal de f est le bord du bassin d'attraction du point 0. C'est une variété réelle analytique, singulière et strictement pseudoconvexe [3].

Au cas d'une variable, les polynômes de degré $d \geq 2$ dont l'ensemble de Julia est une courbe, sont conjugués à z^d ou à $\pm T_d$ [19, p. 127] où T_d est le polynôme de Tchebychev de degré d . Le polynôme T_d n'est pas homogène.

En appliquant le théorème 1.3 à un relevé polynomial d'un endomorphisme f de \mathbb{P}^k on obtient le résultat suivant:

Corollaire 1.5 [4, 3] *Soit f un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$ de \mathbb{P}^k ($k \geq 1$). Supposons que dans un ouvert de \mathbb{P}^k , le courant de Green de f soit lisse et strictement positif. Alors f est une application de Lattès.*

On dit que le courant de Green de f est *lisse et strictement positif* dans un certain ouvert U si dans U il est égale à une forme de bidegré $(1, 1)$ de classe $\mathcal{C}^{2+\epsilon}$, strictement positive et fermée. Un petit défaut du lemme 2.5 ne nous permet pas de remplacer la classe $\mathcal{C}^{2+\epsilon}$ par \mathcal{C}^2 .

Le point de vu d'Eremenko sur les solutions non triviales de l'équation fonctionnelle $f \circ g = g \circ f$, en particulier sur les fonctions de Lattès, concerne

la notion d'orbifold qui est considérée par Thurston [21]. Cette notion est également utilisée au cas de dimension quelconque.

Définition 1.6 [8, 9] Soit X une variété complexe. Notons $\mathcal{H}(X)$ l'ensemble des sous-ensembles analytiques irréductibles de codimension 1 de X . On appelle *orbifold* un couple (X, m) où m est une fonction définie sur $\mathcal{H}(X)$ à valeurs dans $\mathbb{N}^+ \cup \{\infty\}$, égale à 1 sauf sur une famille localement finie de sous-ensembles analytiques de X . Un revêtement d'orbifolds $\pi : (X_1, m_1) \longrightarrow (X_2, m_2)$ est un revêtement ramifié de $X_1 \setminus \bigcup_{m_1(H)=\infty} H$ dans $X_2 \setminus \bigcup_{m_2(H)=\infty} H$ vérifiant $\text{mult}(\pi, H).m_1(H) = m_2(\pi(H))$ pour tout $H \in \mathcal{H}(X_1)$, où $\text{mult}(\pi, H)$ désigne la multiplicité de π en un point générique de H .

Soit f un endomorphisme holomorphe de \mathbb{P}^k définissant un revêtement d'un orbifold $\mathcal{O} = (\mathbb{P}^k, m)$ dans lui-même. Alors, l'ensemble critique de f est *préperiodique*, c'est-à-dire $f^{n_1}(\mathcal{C}_f) = f^{n_2}(\mathcal{C}_f)$ pour certains $0 \leq n_1 < n_2$ où \mathcal{C}_f désigne l'ensemble critique de f . On dit qu'une telle application est *critiquement finie*. La preuve du corollaire suivant se trouve dans [9]:

Corollaire 1.7 *Sous l'hypothèse du théorème 1.3 ou du corollaire 1.5, il existe un orbifold $\mathcal{O} = (\mathbb{P}^k, m)$ tel que f définisse un revêtement de \mathcal{O} dans lui-même. En particulier, f est critiquement fini.*

Voici le plan de la démonstration. Nous montrons d'abord qu'il existe un ouvert U dans lequel J est une hypersurface $\mathcal{C}^{2+\epsilon}$ strictement pseudoconvexe. Ceci s'appuie sur trois principaux arguments: G ne peut s'annuler au voisinage d'aucun point de J car $J \subset \partial\{G = 0\}$, J n'est pas laminé par des variétés complexes et un théorème de Trépreau qui implique que si une feuille \mathcal{F} de la lamination de J ne contient aucun sous-ensemble analytique passant par un point $a \in \mathcal{F}$ alors G est nulle dans un demi-voisinage de a bordé par \mathcal{F} .

On choisit un point périodique répulsif $b \in J \cap U$ de période n . Posons $g := f^n$. Le fait que J est strictement pseudoconvexe et invariant par g permet de rendre à J la forme $\text{Im}z_k = \|z'\|^2$ en utilisant un changement de coordonnées local. Plus précisément, on construit une application holomorphe (appelée application de Poincaré) $\varphi : \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}^k$ telle que $J^* := \varphi(J) = \{\text{Im}z_k = \|z'\|^2\}$. Les applications biholomorphes locales qui envoient un ouvert de J^* dans un autre, en particulier $\Lambda := \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$, sont affines. On peut les décrire. En suite, on construit le groupe \mathcal{A} de telles applications qui préservent les fibres $\varphi^{-1}(z)$ et on montre que ce groupe agit transitivement sur tous les fibres de φ .

Le dernier paragraphe se consacre à la construction de la fibration invariante qui entraînera l'homogénéité de f . Nous montrons que l'image de $\{z' = u\}$ par φ est contenue dans une droite complexe pour tout $u \in \mathbb{C}^{k-1}$. Pour ceci on utilise les propriétés de la fonction de Green, sa croissance et sa harmonicité sur les variétés stables. On montre finalement que ces droites se coupent en un point et cette fibration de droites est invariante par f .

2 Applications de Poincaré

On considère un endomorphisme f de degré $d \geq 2$ de \mathbb{C}^k dont l'ensemble de Julia d'ordre maximal J est laminé par des hypersurfaces réelles de classe $\mathcal{C}^{2+\epsilon}$ dans un certain ouvert V de \mathbb{C}^k . Nous allons étudier f en utilisant sa forme triangulaire au voisinage des points périodiques répulsifs.

Une application Λ de \mathbb{C}^k dans lui-même est appelée *application triangulaire dilatante* si elle est du type

$$\Lambda(z) = (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2 + P_2(z_1), \dots, \lambda_k z_k + P_k(z_1, \dots, z_{k-1}))$$

où $1 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_k|$ et P_i est un polynôme en z_1, \dots, z_{i-1} vérifiant $P_i(\lambda_1 z_1, \dots, \lambda_{i-1} z_{i-1}) = \lambda_i P_i(z_1, \dots, z_{i-1})$ pour tout $i = 2, \dots, k$.

Lemme 2.1 *Soient f un endomorphisme holomorphe de \mathbb{C}^k et a un point fixe répulsif de f . Alors il existe une application holomorphe ouverte $\varphi_a : \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}^k$ (application de Poincaré) et une application triangulaire dilatante $\Lambda_a : \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}^k$ telles que $\varphi_a(0) = a$, $\varphi'_a(0)$ inversible et $f \circ \varphi_a = \varphi_a \circ \Lambda_a$. Si de plus a appartient à J alors $\varphi(\mathbb{C}^k)$ est un ouvert de complémentaire pluripolaire de \mathbb{P}^k .*

Preuve— D'après le théorème de Sternberg [20], il existe une application holomorphe ouverte φ_a d'un voisinage U de $0 \in \mathbb{C}^k$ dans \mathbb{C}^k et une application triangulaire dilatante $\Lambda_a : \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}^k$ telles que $\varphi_a(0) = a$, $\varphi'_a(0)$ inversible et $f \circ \varphi_a = \varphi_a \circ \Lambda_a$ au voisinage de 0 . On va prolonger l'application φ_a en application holomorphe ouverte de \mathbb{C}^k dans \mathbb{C}^k . Comme Λ_a est dilatante, pour tout $z \in \mathbb{C}^k$ fixé la suite $\Lambda_a^{-m}(z)$ tend vers 0 . On pose $\varphi_a(z) := f^m \circ \varphi_a \circ \Lambda_a^{-m}(z)$ pour m suffisamment grand. Cette application est bien définie, holomorphe et indépendante de m car $f^m \circ \varphi_a = \varphi_a \circ \Lambda_a^m$ au voisinage de 0 . De plus, elle est ouverte car φ_a est ouverte au voisinage de 0 . Par prolongement analytique, $f \circ \varphi_a = \varphi_a \circ f$ dans tout \mathbb{C}^k .

Supposons maintenant que $a \in J$. Par définition de φ , l'ouvert $\varphi(\mathbb{C}^k)$ est égal à l'ensemble $\bigcup_{m \geq 1} f^m(U)$. Comme $U \cap J \neq \emptyset$, ce dernier ouvert est de complémentaire pluripolaire (voir l'introduction).

□

Corollaire 2.2 *Soit f un endomorphisme polynomial de \mathbb{C}^k qui se prolonge en endomorphisme holomorphe de \mathbb{P}^k . Alors son ensemble de Julia d'ordre maximal J ne contient aucune variété complexe passant par un point périodique répulsif. En particulier, J n'est pas laminé par des variétés complexes dans aucun ouvert qui le rencontre.*

Preuve— Supposons que J contient une variété complexe Σ passant par un point périodique répulsif $a \in J$. Quitte à remplacer f par un itéré, on peut supposer que a est fixe. Notons Λ_a et φ_a comme dans le lemme 2.1. Posons $\Sigma^* := \varphi_a^{-1}(\Sigma)$.

Comme Λ_a est dilatante, la famille $\{\Lambda_a^m|_{\Sigma^*} \text{ avec } m \in \mathbb{N}\}$ n'est pas normale. D'après le lemme de renormalisation de Zalcman [9, 17], l'adhérence de l'ensemble $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Lambda_a^m(\Sigma^*)$ contient des images holomorphes non constantes de \mathbb{C} . Par conséquent, $J^* = \varphi_a^{-1}(J)$ contient des images holomorphes non constantes de \mathbb{C} . Comme φ_a est ouverte, J contient aussi des images holomorphes non constantes de \mathbb{C} . Ceci contredit le théorème de Liouville car J est un compact de \mathbb{C}^k .

D'après le théorème de Briend-Duval [6], l'ensemble des points périodiques répulsifs est dense dans J . On en déduit que J ne peut être laminé par des variétés complexes dans aucun ouvert qui le rencontre.

□

Proposition 2.3 *Soit f un endomorphisme de \mathbb{C}^k vérifiant l'hypothèse du théorème 1.3. Alors il existe un ouvert U de \mathbb{C}^k tel que $J \cap U$ soit une hypersurface non vide de classe $\mathcal{C}^{2+\epsilon}$ et strictement pseudoconvexe de U .*

Pour prouver cette proposition, on aura besoin du lemme suivant:

Lemme 2.4 *Soient I un ouvert de \mathbb{R} et K un fermé parfait de I . Alors l'ensemble suivant est dense dans K :*

$$Z_K := \{x \in K, \]x - \delta, x[\cap K \neq \emptyset \text{ et }]x, x + \delta[\cap K \neq \emptyset \text{ pour tout } \delta > 0\}.$$

Preuve— Supposons que K est non vide. On montre d'abord que Z_K est aussi non vide. Supposons que ce n'est pas le cas. Notons $S := I \setminus K$. Alors S est une réunion dénombrable d'intervalles disjoints S_n de \mathbb{R} et chaque point de K est un sommet de l'un des S_n . En particulier, K est dénombrable et les composantes connexes de K sont des singletons. Par hypothèse, K ne contient pas de point isolé. Il est donc un ensemble de Cantor. Ceci est impossible car tout ensemble de Cantor est non dénombrable.

De même manière, on montre que si $I' \subset I$ est un ouvert vérifiant $K' := K \cap I' \neq \emptyset$ alors $Z_{K'} \neq \emptyset$ et donc $Z_K \cap I' \neq \emptyset$. Ceci implique que Z_K est dense dans K .

□

Preuve de la proposition 2.3 — Montrons d'abord qu'il existe un ouvert U dans lequel J est une hypersurface de classe $\mathcal{C}^{2+\epsilon}$. Par hypothèse sur la lamination de J , il existe un ouvert $V \subset \mathbb{C}^k$ muni des coordonnées locales (w_1, \dots, w_k) tel que $J \cap V$ soit une réunion non vide de graphes de fonctions $\mathcal{C}^{2+\epsilon}$ au-dessus de

$$B_{2k-1} := \{w \text{ vérifiant } \|w\| < 1 \text{ et } \text{Rew}_k = 0\}.$$

Notons ces graphes par Γ_ν où le paramètre $\nu \in \mathbb{R}$ est la partie réelle de la k -ième coordonnée du point $\Gamma_\nu \cap \{w' = 0 \text{ et } \text{Im} w_k = 0\}$. C'est-à-dire $\Gamma_\nu \cap \{w' = 0 \text{ et } \text{Im} z_k = 0\} = (0, \nu)$. Notons K l'ensemble des valeurs de ν . C'est un fermé d'un certain ouvert I de \mathbb{R} .

Supposons que J n'est une hypersurface dans aucun ouvert qui le rencontre. Alors K est un ensemble parfait. L'ensemble Z_K est défini dans le lemme 2.4. Fixons un $\nu \in Z_K$. Montrons que Γ_ν est Levi-plate. Supposons que Γ_ν n'est pas Levi-plate. D'après le théorème de Trépreau, il existe un point $w \in \Gamma_\nu$ au voisinage duquel les disques holomorphes attachés à Γ_ν remplit un demi-voisinage à un côté bordé par Γ_ν [22]. Notons W ce demi-voisinage. La fonction de Green G est plurisousharmonique, positive ou nulle. Elle est égale à 0 sur J . Par principe du maximum, elle s'annule sur W . Par définition de K et de Z_K , il existe des feuilles de J qui rencontrent W . On en déduit qu'il existe des points de J au voisinage desquels G est nulle. Ceci contredit le fait que J est contenu dans le bord de $\{G = 0\}$.

Alors Γ_ν est Levi-plate pour tout $\nu \in Z_K$. D'après le lemme 2.4, Z_K est dense dans K . Par continuité, Γ_ν est Levi-plate pour tout $\nu \in K$. En particulier, J est laminé par des variétés complexes. Ceci contredit le corollaire 2.2.

On conclut qu'il existe un ouvert U de \mathbb{C}^k dans lequel J est une variété de classe $\mathcal{C}^{2+\epsilon}$. Comme G est plurisouharmonique et J est contenu dans le bord de $\{G = 0\}$, la variété $J \cap U$ est pseudoconvexe en tout point. Montrons qu'il est strictement pseudoconvexe en au moins un point. Supposons que ceci n'est pas le cas. Pour tout $a \in J \cap U$, on note L_a l'espace tangent complexe de J en a , \mathcal{L}_a la forme de Levi de J en a et $K_a \subset L_a$ l'ensemble des vecteurs holomorphes X vérifiant $\mathcal{L}_a(X, \overline{X}) = 0$. Comme J est pseudoconvexe, \mathcal{L}_a est définie par une matrice semi-positive diagonable. Par conséquent, $\mathcal{L}_a(X, \overline{X}) = 0$ entraîne $\mathcal{L}_a(X, \cdot) = 0$. Alors $K_a = \{X \in L_a, \mathcal{L}_a(X, \cdot) = 0\}$ est un espace vectoriel complexe de dimension au moins 1. Quitte à remplacer U par un ouvert convenable, on peut supposer que la dimension r de K_a est indépendante de $a \in J \cap U$. D'après le théorème de Freeman [5, p.185], $J \cap U$ est laminé par des variétés complexes de dimension r . Ceci contredit le corollaire 2.2.

Alors $J \cap U$ est strictement pseudoconvexe en au moins un point. Quitte à remplacer U par un petit voisinage de ce point, on peut supposer que $J \cap U$ est une hypersurface strictement pseudoconvexe de U .

□

Par suite, on considère $b \in J \cap U$ un point périodique répulsif de période n de f . Posons $g := f^n$. D'après le lemme 2.1, il existe une application holomorphe ouverte $\varphi : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ et une application triangulaire dilatante $\Lambda : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ telles que $\varphi(0) = b$, $\varphi'(0)$ inversible et $g \circ \varphi = \varphi \circ \Lambda$. Posons $J^* := \varphi^{-1}(J)$, $\mu^* := \varphi^*(\mu)$ et $G^* := G \circ \varphi$. L'application triangulaire dilatante $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_k)$ s'écrit sous la forme

$$\Lambda(z) = (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2 + P_2(z_1), \dots, \lambda_k z_k + P_k(z_1, \dots, z_{k-1}))$$

où $1 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_k|$ et P_i est un polynôme en z_1, \dots, z_{i-1} vérifiant

$$P_i(\lambda_1 z_1, \dots, \lambda_{i-1} z_{i-1}) = \lambda_i P_i(z_1, \dots, z_{i-1}).$$

Lemme 2.5 *On a $\lambda_k = |\lambda_i|^2 > 1$ pour tout $i = 1, \dots, k-1$. La variété J^* est définie par $\text{Im}(\alpha z_k) = P(z', \overline{z}')$ où $\alpha \neq 0$ est un certain nombre complexe et P est un polynôme réel homogène de degré 2.*

Preuve— On choisit un système linéaire de coordonnées (w_1, \dots, w_k) de \mathbb{C}^k de sorte que l'espace tangent de J^* en 0 soit égal à $H := \{w' = 0 \text{ et } \text{Im} w_k =$

$0\}$. Dans ces coordonnées Λ n'est pas forcément triangulaire. On note $\Lambda_1^*, \dots, \Lambda_k^*$ leurs fonctions coordonnées. Au voisinage de 0, J^* est le graphe d'une fonction réelle h de classe $\mathcal{C}^{2+\epsilon}$ qui est définie sur un ouvert de H , c'est-à-dire $J^* = \{\text{Im}w_k = h(w', \text{Re}w_k)\}$ au voisinage de 0. Considérons le développement d'ordre 2 de h :

$$h(w', \text{Re}w_k) = P(w') + S(w')\text{Re}w_k + c(\text{Re}w_k)^2 + O(\|(w', \text{Re}w_k)\|^{2+\epsilon})$$

où P (resp. S) est un polynôme réel homogène de degré 2 (resp. 1) et c est une constante. Comme J^* est strictement pseudoconvexe en 0, la partie non-harmonique Q dans P est définie strictement positive.

Le fait que J^* est invariant par Λ implique que l'espace tangent complexe $\{w_k = 0\}$ et l'espace tangent réel $\{\text{Im}w_k = 0\}$ de J^* en 0 sont invariants par la dérivée $\Lambda'(0)$. C'est-à-dire il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\Lambda_k^*(w) = \theta w_k + O(\|w\|^2)$. On écrit $(\Lambda_1^*, \dots, \Lambda_{k-1}^*)$ sous la forme

$$(\Lambda_1^*, \dots, \Lambda_{k-1}^*) = Aw' + Bw_k + O(\|w\|^2)$$

où A est une matrice carrée de taille $k-1$ et $B \in \mathbb{C}^{k-1}$. On obtient du développement de h et de l'invariance de J^* par Λ en considérant seulement les parties non-harmoniques d'ordre 2 en w' que $\theta Q(w') = Q(Aw')$. Soient ν une valeur propre de A et $u \neq 0$ un vecteur propre associé à ν . On a $\theta Q(\lambda u) = Q(\lambda \nu u)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Comme Q est définie strictement positive, on obtient de la dernière égalité que $\theta = |\nu|^2$.

L'application Λ étant dilatante, le module de ν doit être strictement plus grand à 1. On constate que θ est la plus grande valeur propre de $\Lambda'(0)$ et elle est strictement plus grande que les autres en module. Ceci implique que $\theta = \lambda_k$ et $\{z_k = 0\} = \{w_k = 0\}$. On peut alors choisir $w' = z'$ et $w_k = \alpha z_k$ avec un $\alpha \in \mathbb{C}^*$ convenable. On a $\lambda_k = |\lambda_i|^2$ pour tout $i = 1, \dots, k-1$. L'application Λ étant triangulaire, les polynômes P_i sont de degré 1 si $i \neq k$ et de degré 2 si $i = k$. Comme Λ est triangulaire, on a $B = 0$. Pour simplifier les notations, on suppose que $\alpha = 1$. Le fait que J^* est invariant par Λ implique que

$$\lambda_k h(z', \text{Re}z_k) + \text{Im}P_k(z') = h(\Lambda_1(z'), \dots, \Lambda_{k-1}(z'), \lambda_k \text{Re}z_k + \text{Re}P_k(z')).$$

En considérant les termes d'ordre 2, on obtient:

$$\lambda_k [P(z') + S(z')\text{Re}z_k + c(\text{Re}z_k)^2] + \text{Im}P_k(z') = P(Az') + \lambda_k S(Az')\text{Re}z_k + c\lambda_k^2 (\text{Re}z_k)^2.$$

Cette dernière équation implique que $S = 0$ et $c = 0$ car les valeurs propres de A est de module strictement supérieur à 1 et $\lambda_k > 1$.

Posons $r(z', \text{Rez}_k) := h(z', \text{Rez}_k) - P(z') = O(\|(z', \text{Rez}_k)\|^{2+\epsilon})$. Il reste à montrer que $r = 0$. Soit $\Psi : \mathbb{C}^{k-1} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^{k-1} \times \mathbb{R}$ définie par

$$\Psi(z', \text{Rez}_k) := (\Lambda_1(z'), \dots, \Lambda_{k-1}(z'), \lambda_k \text{Rez}_k + \text{Re}P_k(z')).$$

Alors on a $\lambda_k r(z', \text{Rez}_k) = r(\Psi(z', \text{Rez}_k))$. On en déduit que $r(z', \text{Rez}_k) = \lambda_k^s r(\Psi^{-s}(z', \text{Rez}_k))$. D'autre part, on obtient de la triangularité de Λ que $\Psi^{-s}(z', \text{Rez}_k) = O(\lambda_k^{-s/2} \log s)$ quand $s \rightarrow \infty$. Par suite,

$$r(z', \text{Rez}_k) = \lim_{s \rightarrow \infty} \lambda_k^s r(\Psi^{-s}(z', \text{Rez}_k)) = \lim_{s \rightarrow \infty} \lambda_k^s O(\lambda_k^{-(2+\epsilon)s/2} (\log s)^{2+\epsilon}) = 0.$$

□

Proposition 2.6 *Quitte à effectuer un changement de coordonnées qui fixe la droite $\{z' = 0\}$, on peut supposer que J^* soit définie par l'équation $\text{Im}z_k = \|z'\|^2$. Dans ces nouvelles coordonnées Λ n'est pas forcément triangulaire et la fonction $G^*(z)$ est nulle si $\text{Im}z_k \geq \|z'\|^2$.*

Preuve— On effectue le premier changement de coordonnées $z_k \mapsto \alpha z_k$ qui permet de supposer que $\alpha = 1$.

Le polynôme réel $P(z', \bar{z}')$, qui définit la variété J^* , est homogène de degré 2. On peut l'écrire en somme $q(z', \bar{z}') + \text{Im}H(z')$ où q est une forme hermitienne et H est un polynôme holomorphe de degré 2. Quitte à changer z_k par $z_k - H(z')$, on peut supposer que $H = 0$.

Comme J est strictement pseudoconvexe en b , q est définie strictement positive ou négative. Quitte à remplacer z_k par $-z_k$ au cas nécessaire, on peut supposer que q est définie strictement positive. Un changement linéaire convenable des coordonnées z_1, \dots, z_{k-1} rend q sa forme canonique $q(z', \bar{z}') = \|z'\|^2$.

Il est clair que les changements de coordonnées effectués fixent la droite $\{z' = 0\}$. La fonction plurisouharmonique, positive G^* est nulle sur l'hypersurface J^* qui est strictement pseudoconvexe. Par principe du maximum, elle doit s'annuler également sur les disques holomorphes à bord dans J^* . On en déduit qu'elle s'annule sur $\{z \in \mathbb{C}^k, \text{Im}z_k \geq \|z'\|^2\}$.

□

3 Groupes d'automorphismes préservant J^*

On utilise les notations du paragraphe 2 avec le système de coordonnées défini par la proposition 2.6. On n'aura plus besoin du fait que Λ est triangulaire. Rappelons que la droite $\{z' = 0\}$ est toujours invariante par Λ et la restriction de Λ sur cette droite est l'application linéaire $(0, z_k) \mapsto (0, \lambda_k z_k)$ où $\lambda_k \in \mathbb{R}^+$ est la plus grande valeur propre de $\Lambda'(0)$. Les autres valeurs propres de $\Lambda'(0)$ sont de module $\sqrt{\lambda_k}$.

Pour tout $w = (w', v + i\|w\|^2) \in J^*$ avec $w' \in \mathbb{C}^{k-1}$ et $v \in \mathbb{R}$, posons $\tau_w(z) := (z' + w', z_k + 2i\bar{w}'z' + v + i\|w'\|^2)$. C'est une application affine, inversible et vérifiant $\tau_w(0) = w$. Elle préserve les variétés $\{\text{Im}z_k - \|z'\|^2 = \text{const}\}$. Notons pour tout λ réel positif σ_λ l'application linéaire de \mathbb{C}^k dans lui-même définie par $\sigma_\lambda(z', z_k) := (\sqrt{\lambda}z', \lambda z_k)$. Cette application préserve J^* . Notons \mathcal{G}_1 (resp. \mathcal{G}_2 , \mathcal{G}_3 et \mathcal{G}_4) l'ensemble des automorphismes affines de \mathbb{C}^k qui s'écrivent sous forme $(u(z'), z_k)$ (resp. $\sigma_\lambda \circ (u(z'), z_k)$, $\tau_w \circ (u(z'), z_k)$ et $\tau_w \circ \sigma_\lambda \circ (u(z'), z_k)$) où u est un automorphisme linéaire isométrique de \mathbb{C}^{k-1} , $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $w \in J^*$. On vérifie sans peine que \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 sont des groupes. L'ensemble \mathcal{G}_3 est égal à l'ensemble des éléments de \mathcal{G}_4 dont toute valeur propre de la partie linéaire est de module 1.

Lemme 3.1 *Soient w, \tilde{w} deux points de J^* et τ une application holomorphe ouverte d'un voisinage W de w dans \mathbb{C}^k avec $\tau(w) = \tilde{w}$. Supposons que $\tau(J^* \cap W) \subset J^*$. Alors $\tau_{\tilde{w}}^{-1} \circ \tau \circ \tau_w$ appartient à \mathcal{G}_2 . Par conséquent, \mathcal{G}_3 et \mathcal{G}_4 sont des groupes et $\tau \in \mathcal{G}_4$.*

Preuve— On peut considérer ce lemme comme un corollaire d'un résultat d'Alexander [1]. Donnons ici une autre preuve.

Observons que l'application $\tau_{\tilde{w}}^{-1} \circ \tau \circ \tau_w$ préserve J^* et fixe le point 0. Il suffit donc de considérer le cas $w = \tilde{w} = 0$. Dans ce cas $\tau_w = \tau_{\tilde{w}} = \text{Id}$. On pose $\tau = (\tau', \tau'')$ où τ' se compose par $k-1$ premières fonctions coordonnées de τ et τ'' est sa dernière fonction coordonnée.

Le fait que J^* est invariant par τ implique que

$$\text{Im}\tau''(z', \text{Re}z_k + i\|z'\|^2) = \|\tau'(z', \text{Re}z_k + i\|z'\|^2)\|^2.$$

En particulier, pour $\text{Re}z_k = 0$ on a

$$\text{Im}\tau''(z', i\|z'\|^2) = \|\tau'(z', i\|z'\|^2)\|^2.$$

La partie pluriharmonique du membre à droite est nulle. Par conséquent, $\text{Im}\tau''(z', 0) = 0$ et donc $\tau''(z', 0) = 0$. On peut dire que τ préserve l'hyperplan $\{z_k = 0\}$.

Soient $z \in J^*$ assez proche de 0 et $\tilde{z} := \tau(z)$. Posons $\tilde{\tau} = (\tilde{\tau}', \tilde{\tau}'') := \tau_{\tilde{z}}^{-1} \circ \tau \circ \tau_z$. Comme τ , l'application $\tilde{\tau}$ préserve J^* et fixe 0. On montre de même manière que $\tilde{\tau}$ préserve $\{z_k = 0\}$. Ceci implique que l'image de l'hyperplan tangent de J^* en z par τ est un hyperplan. Soit $\mathbb{P}^{k*} \simeq \mathbb{P}^k$ l'ensemble des hyperplans de \mathbb{P}^k . Notons \mathcal{F} la famille des hyperplans dont l'image par τ est un hyperplan. C'est un ensemble analytique dans \mathbb{P}^{k*} qui contient la famille \mathcal{F}' des hyperplans tangents à J^* au voisinage de 0. Comme \mathcal{F}' est de codimension réelle 1 dans \mathbb{P}^{k*} , la famille analytique \mathcal{F} est un ouvert de \mathbb{P}^{k*} et contient tous les hyperplans qui passent au voisinage de 0. On en déduit que τ est affine et donc linéaire car $\tau(0) = 0$.

Comme J^* est invariante par τ et $\tau(0) = 0$, l'hyperplan tangent réel $\{\text{Im}z_k = 0\}$ de J^* en 0 est invariant par $\tau'(0)$. Par conséquent, $\frac{\partial \tau''}{\partial z_k}(0)$ est un nombre réel et $\frac{\partial \tau''}{\partial z'}(0) = 0$. On peut donc écrire $\tau''(z) = \lambda z_k$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Le fait que J^* est invariante par τ implique que $\lambda \|z'\|^2 = \|\tau'(z', \text{Re}z_k + i\|z'\|^2)\|^2$. D'où $\lambda > 0$, τ' est indépendant de z_k et $\|\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\tau'(z')\| = \|z'\|^2$. Ceci implique que $u := \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\tau'(z')$ est une isométrie complexe de \mathbb{C}^{k-1} . L'application $\tau(z)$ s'écrit sous la forme $\sigma_\lambda \circ (u(z'), z_k)$. Il appartient donc à \mathcal{G}_2 .

Notons $\tilde{\mathcal{G}}_4$ le groupe engendré par les éléments de \mathcal{G}_4 . Soit $\tau^* \in \tilde{\mathcal{G}}_4$. On montre que $\tau^* \in \mathcal{G}_4$. Comme τ^* est un automorphisme préservant J^* , le point $w^* := \tau^*(0)$ appartient à J^* . D'après la première partie, $\tau_{w^*}^{-1} \circ \tau^*$ appartient à \mathcal{G}_2 . Ceci implique que $\tau^* \in \mathcal{G}_4$. L'ensemble \mathcal{G}_4 est donc un groupe. En particulier, $\tau \in \mathcal{G}_4$.

L'ensemble \mathcal{G}_3 est égal à l'ensemble des éléments de \mathcal{G}_4 dont toute valeur propre de la partie linéaire est de module 1. Par conséquent, \mathcal{G}_3 est aussi un groupe. □

Corollaire 3.2 *L'application Λ s'écrit sous la forme $\sigma_{\lambda_k} \circ \tau$ où τ est un élément de \mathcal{G}_1 .*

Preuve— D'après le lemme 3.1, l'application Λ s'écrit sous la forme $\sigma_\lambda \circ \tau$ où $\lambda > 0$ et $\tau \in \mathcal{G}_1$. On sait que la restriction de Λ sur $\{z' = 0\}$ est égale à $(0, z_k) \mapsto (0, \lambda_k z_k)$. Par conséquent, $\lambda = \lambda_k$ et donc $\Lambda(z) = \sigma_{\lambda_k} \circ \tau$. □

Corollaire 3.3 *Soient w, \tilde{w} deux points de J^* vérifiant $\varphi(w) = \varphi(\tilde{w})$. Alors il existe $\tau \in \mathcal{G}_3$ avec $\tau(w) = \tilde{w}$ tel que $\tau \circ \varphi = \varphi$.*

Preuve— On considère le cas où w et \tilde{w} n'appartiennent pas à l'ensemble critique de φ . Le cas général sera déduit par prolongement analytique. Fixons des petits voisinages W, \tilde{W}, V de w, \tilde{w} et de $\varphi(w) = \varphi(\tilde{w})$ tels que φ réalise un biholomorphisme entre W (resp. \tilde{W}) et V . On pose $\tau := (\varphi|_{\tilde{W}})^{-1} \circ \varphi|_W$. On a $\varphi \circ \tau = \varphi$ sur W et

$$\tau(J^* \cap W) = (\varphi|_{\tilde{W}})^{-1}(J \cap V) = J^* \cap \tilde{W}.$$

D'après le lemme 3.1, l'application τ appartient à \mathcal{G}_4 . Par prolongement analytique on a $\varphi \circ \tau = \varphi$ sur \mathbb{C}^k .

L'application τ s'écrit sous forme $\tau^* \circ \sigma_\lambda \circ \tilde{\tau}$ où $\lambda > 0$, $z \in J^*$ et τ^* et $\tilde{\tau}$ appartient à \mathcal{G}_3 . Il reste à montrer que $\lambda = 1$. Supposons que $\lambda \neq 1$. Alors les valeurs propres de la partie linéaire de τ sont différentes de 1. Il existe donc $z \in \mathbb{C}^k$ tel que $\tau(z) = z$. Au voisinage de z l'application τ réalise donc une permutation dans les fibres de φ . Par conséquent, pour un certain $m \geq 1$, on a $\tau^m = \text{Id}$. En particulier, les valeurs propres de la partie linéaire de τ sont de module 1. Ceci contredit le fait que $\lambda \neq 1$. □

Il est clair que l'ensemble des applications vérifiant le corollaire 3.3 forme un sous-groupe discret de \mathcal{G}_3 . Notons \mathcal{A} ce groupe. Les éléments de ce groupe préservent J^* . On note $\mathcal{A}|_{J^*}$ la restriction de \mathcal{A} sur J^* (voir les premières notations de l'article).

Proposition 3.4 *Le groupe $\mathcal{A}|_{J^*}$ est co-compact. Le groupe \mathcal{A} agit transitivement sur les fibres de φ .*

Preuve— Pour ne pas confondre les notations, on note w' les $k-1$ premières coordonnées de w et w'' sa dernière coordonnée pour tout $w \in \mathbb{C}^k$. Pour toute application τ de \mathbb{C}^k dans \mathbb{C}^k , τ' se compose par les $k-1$ premières fonctions coordonnées de τ et τ'' est la dernière fonction coordonnée de τ .

L'application Λ étant dilatante et préservant les fibres de φ , pour montrer que $\mathcal{A}|_{J^*}$ est co-compact, il suffit de montrer qu'il existe un ouvert borné W de J^* contenant 0 tel que pour tout $w \in \partial W$, il existe $w^* \in W$ vérifiant $\varphi(w^*) = \varphi(w)$. En effet, ceci implique que W contient un domaine fondamental de $\mathcal{A}|_{J^*}$.

Notons Π la projection de J^* dans $\mathbb{C}^{k-1} \times \mathbb{R}$ définie par $\Pi(z', z_k) := (z', \operatorname{Re} z_k)$. On choisit un nombre fini de points $a_s = (a'_s, a''_s) \in J^*$ pour $s = 1, 2, 3, \dots$ vérifiant les propriétés suivantes:

1. Pour tout s , on a $1/2 < \|\Pi(a_s)\| < 1$.
2. Dans $\mathbb{C}^{k-1} \times \mathbb{R}$, l'enveloppe convexe U des points $\Pi(a_s)$ contient la boule de centre 0 est de rayon $1/2$.
3. Pour tout $u \in \partial U$, il existe un s tel que $\|u - \Pi(a_s)\| < 1/16$.

On choisit $b_0 \in J^*$ tel que $\|b_0\| < 1/100$ et tel que la mesure

$$\frac{1}{(d_g)^{sk}} \sum_{g^s(z)=\varphi(b_0)} \delta_z$$

tende vers μ quand s tend vers l'infini. Alors l'ensemble $\bigcup_{s \geq 0} g^{-s}(\varphi(b_0))$ est dense dans J . Quitte à perturber légèrement les points a_s , on peut supposer qu'il existe un p tel que $g^p(\varphi(a_s)) = \varphi(b_0)$ pour tout s . Posons $b_s := \Lambda^p(a_s)$. Soit V l'enveloppe convexe des $\Pi(b_s)$ et $W := \Pi^{-1}(V)$. Observons que V est de taille $\lambda_k^{p/2}$ dans les directions complexes et λ_k^p dans la direction réelle (voir le corollaire 3.2).

Pour $w \in \partial W$, on choisit un s tel que $\|\Pi(\Lambda^{-p}(w)) - \Pi(a_s)\| < 1/16$. Si $\tau = (\tau', \tau'') \in \mathcal{A}$ est tel que $\tau(b_0) = b_s$ et $w^* := \tau^{-1}(w)$ alors $\varphi(w^*) = \varphi(w)$. On montre que $w^* \in W$. D'après la condition 2, il suffit de montrer que $\|w^{*'}\| < \lambda_k^{p/2}/4$ et $\|\operatorname{Re} w^{*''}\| < \lambda_k^p/4$. Comme τ' et $\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\Lambda'$ sont des isométries de \mathbb{C}^{k-1} , on obtient

$$\|w^{*'} - b'_0\| = \|w' - b'_s\| = \lambda_k^{p/2} \|\Lambda^{-p}(w)' - a'_s\| < \lambda_k^{p/2}/16.$$

D'où $\|w^{*'}\| < \lambda_k^{p/2}/4$ car $\|b_0\| < 1/100$.

Posons $\tilde{\tau} = (\tilde{\tau}', \tilde{\tau}'') := \tau_{b_s}^{-1} \circ \tau \circ \tau_{b_0}$, $w_1 := \tau_{b_s}^{-1}(w)$ et $w_2 := \tilde{\tau}^{-1}(w_1)$. Alors $w^* = \tau_{b_0}(w_2)$ et $\tilde{\tau}$ est linéaire isométrique car $\tau \in \mathcal{G}_3$ et $\tau(0) = 0$. On a

$$\|w'_2\| = \|w'_1\| = \|w' - b'_s\| \leq \lambda_k^{p/2}/16.$$

On a aussi $\operatorname{Re} w''_1 = w'' - \operatorname{Re} b''_s + 2\operatorname{Im}(w' - b'_s)(\overline{b'_s})'$. D'où

$$\|\operatorname{Re} w''_1\| \leq \|w'' - \operatorname{Re} b''_s\| + 2\|w' - b'_s\| \|b'_s\| \leq 3\lambda_k^p/16$$

car

$$\|w'' - \text{Re}b_s''\| = \lambda_k^p \|\Lambda^{-p}(w)'' - a_s''\| < \lambda_k^p/16$$

et

$$\|w' - b_s'\| \|b_s'\| = \lambda_k^p \|\Lambda^{-p}(w)' - a_s'\| \|a_s'\| \leq \lambda_k^p/16.$$

Comme $\tilde{\tau}$ est linéaire isométrique, on a $\|\text{Rew}_2''\| \leq 3\lambda_k^p/16$ car $w_2 = \tilde{\tau}^{-1}(w_1)$. Comme $w^* = \tau_{b_0}(w_2)$, on a $\text{Rew}^{*''} = \text{Rew}_2'' + \text{Re}b_0 - 2\text{Im}(w_2'\bar{b}_0)$. Par conséquent,

$$\|\text{Rew}^{*''}\| \leq \|\text{Rew}_2''\| + \|\text{Re}b_0''\| + 2\|w_2'\| \|b_0\| \leq \frac{3\lambda_k^p}{16} + \frac{1}{100} + \frac{\lambda_k^{p/2}}{800} \leq \frac{\lambda_k^p}{4}.$$

Il en résulte que $\mathcal{A}|_{J^*}$ est co-compact. L'ensemble $\varphi(J^*)$ est un compact de J . D'après le lemme 2.1, $J \setminus \varphi(J^*)$ est un ouvert pluripolaire de J . Cet ouvert est donc vide car J n'est pas pluripolaire dans aucun ouvert qui le rencontre. On a $J = \varphi(J^*)$.

Montrons que \mathcal{A} agit transitivement sur les fibres de φ . Le corollaire 3.3 montre que \mathcal{A} agit transitivement sur le fibre $\varphi^{-1}(z)$ pour tout $z \in J$. Comme $\#g^{-1}(z) \leq (d_g)^k$ pour tout z , l'ensemble $\Lambda^{-1}(\mathcal{A}w)$ est une réunion d'au plus $(d_g)^k$ orbites de \mathcal{A} pour tout $w \in J^*$. Si $\varphi(w) \notin g(\mathcal{C}_g)$, on a $\#g^{-1}(\varphi(w)) = (d_g)^k$ où \mathcal{C} signifie l'ensemble critique. La relation $g \circ \varphi = \varphi \circ \Lambda$ implique que $\varphi^{-1}(\mathcal{C}_g) \subset \Lambda^{-1}(\mathcal{C}_\varphi)$. Alors pour tout $w \in J^* \setminus \Lambda^{-1}(\mathcal{C}_\varphi)$, l'ensemble $\Lambda^{-1}(\mathcal{A}w)$ est une réunion de $(d_g)^k$ orbites de \mathcal{A} . Pour un $w \in J^* \setminus \Lambda^{-1}(\mathcal{C}_\varphi)$ fixé, on peut choisir $\tau_1, \dots, \tau_{(d_g)^k}$ des éléments de \mathcal{A} avec $\tau_1 = \text{Id}$ tels que $\Lambda^{-1}(\mathcal{A}w)$ soit la réunion des orbites $\mathcal{A}.\Lambda^{-1}(\tau_s(w))$ de \mathcal{A} pour $s = 1, \dots, (d_g)^k$.

Par prolongement analytique, ceci est vrai pour tout $w \in \mathbb{C}^k$ à l'exception d'une hypersurface complexe qu'on notera Σ où les points $\varphi(\Lambda^{-1}(\tau_s(w)))$ ne sont pas distincts. Supposons que \mathcal{A} n'agisse pas transitivement sur les fibres de φ . Il existe donc w et u tels que $w \notin \mathcal{A}.u$ et $\varphi(w) = \varphi(u)$. Quitte à perturber légèrement w et u on peut supposer que $\Lambda^{-n}(\mathcal{A}w) \cap \Sigma = \emptyset$ et $\Lambda^{-n}(\mathcal{A}u) \cap \Sigma = \emptyset$ pour tout $n \geq 1$. Par suite, $\varphi(\Lambda^{-1}(\tau_s(w)))$ (resp. $\varphi(\Lambda^{-1}(\tau_s(u)))$) sont les $(d_g)^k$ préimages différentes de $\varphi(w) = \varphi(u)$ par g . On en déduit qu'il existe s_1 tel que $\varphi(\Lambda^{-1} \circ \tau_1(w)) = \varphi(\Lambda^{-1} \circ \tau_{s_1}(w))$. Comme $\tau_1 = \text{Id}$, on a $\varphi(\Lambda^{-1}(w)) = \varphi(\Lambda^{-1}(\tau_{s_1}(w)))$.

Par récurrence, il existe s_1, s_2, \dots tels que pour tout $m \geq 1$ on ait $\varphi(w_m) = \varphi(u_m)$ où $w_m := \Lambda^{-m}(w)$ et $u_m := \Lambda^{-1} \circ \tau_{s_m} \circ \dots \circ \Lambda^{-1} \circ \tau_{s_1}(u)$. Comme $w \notin \mathcal{A}.u$, on a $w_m \notin \mathcal{A}.u_m$ pour tout $m \geq 1$. La suite u_m est bornée. En effet Λ^{-1} est contractante et le corollaire 3.3 permet de contrôler les τ_{s_j} . Soit (u_{m_r}) une sous-suite de (u_m) tendant vers u_0 . Comme w_m tend vers 0,

on a $\varphi(u_0) = \varphi(0)$. Comme $\varphi(0) = b \in J$, on a $u_0 \in J^*$. Il existe donc $\tau \in \mathcal{A}$ tel que $\tau(u_0) = 0$. La suite $v_{m_r} := \tau(u_{m_r})$ tend vers 0 et vérifie $\varphi(v_{m_r}) = \varphi(w_{m_r})$, $v_{m_r} \neq w_{m_r}$ car $w_{m_r} \notin \mathcal{A}.u_{m_r}$. C'est la contradiction recherchée car φ est injective au voisinage de 0.

□

Corollaire 3.5 *L'ensemble J est égal à $\varphi(J^*)$. De plus, pour tout $z \in J$ l'ensemble $\bigcup_{n \geq 0} g^{-n}(z)$ est dense dans J . On en déduit que pour tout $w \in J^*$ l'ensemble*

$$\mathcal{B}_w := \{\Lambda^{-n} \circ \tau(w) \text{ avec } n \geq 0 \text{ et } \tau \in \mathcal{A}\}$$

est dense dans J^ .*

Preuve— On a montré dans la preuve de la proposition 3.4 que $J = \varphi(J^*)$. On en déduit que J est une variété éventuellement singulière et avec ou sans bord.

Soient $z \in J$ et $w \in \varphi^{-1}(z)$. Comme Λ est dilatante, la suite de $w_m := \Lambda^{-m}(w)$ tend vers 0. Par conséquent la suite de $z_m := \varphi(w_m)$ tend vers b . On a

$$g^m(z_m) = g^m(\varphi(w_m)) = \varphi(\Lambda^m(w_m)) = \varphi(w) = z.$$

D'où $z_n \in g^{-n}(z)$. On en déduit que b appartient à l'adhérence de $\bigcup_{m \geq 0} g^{-m}(z)$. Ceci est vrai pour tout point périodique répulsif b de f qui n'appartient à la singularité de J . L'ensemble de tels b est dense dans J . On constate que $\bigcup_{m \geq 0} g^{-m}(z)$ est dense dans J .

L'ensemble \mathcal{B}_w est égal à $\varphi^{-1}(\bigcup_{m \geq 0} g^{-m}(z))$ où $z := \varphi(w)$. Il est donc dense dans $\varphi^{-1}(J) = J^*$.

□

Corollaire 3.6 a. *La valeur propre λ_k de Λ est égale à d_g . La mesure μ^* est égale à $c\Pi^*(m)$ où $c > 0$ est une constante, $\Pi : J^* \longrightarrow \mathbb{C}^{k-1} \times \mathbb{R}$ est définie par $\Pi(z) := (z', \text{Re}z_k)$ et m est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^{k-1} \times \mathbb{R}$.*

b. *Il existe une application $\Lambda_f \in \mathcal{G}_4$ dont la partie linéaire est de déterminant $d^{(k+1)/2}$ telle que $f \circ \varphi = \varphi \circ \Lambda_f$.*

Preuve— **a.** Posons $\tilde{\mu}^* := \Pi^*(m)$. D'après le corollaire 3.2, on a $\Lambda^*(\tilde{\mu}^*) = (\lambda_k)^k \mu^*$. D'après le corollaire 3.3, $\tilde{\mu}^*$ est invariante par $\mathcal{A}|_{J^*}$. D'après la proposition 3.4, il existe une mesure positive $\tilde{\mu}$ à support dans J telle que

$\varphi^*(\tilde{\mu}) = \tilde{\mu}^*$. La relation $\Lambda^*(\tilde{\mu}^*) = \lambda_k^k \mu^*$ entraîne $g^*(\tilde{\mu}) = \lambda_k^k \tilde{\mu}$. Mais on sait que g définit un revêtement ramifié de degré $(d_g)^k$ de \mathbb{C}^k dans \mathbb{C}^k . Par conséquent la masse de $g^*(\tilde{\mu})$ est $(d_g)^k$ fois plus grande que celle de $\tilde{\mu}$. On obtient donc $(\lambda_k)^k = (d_g)^k$ et $\lambda_k = d_g$.

On sait que μ est la seule mesure de probabilité invariante de g qui ne charge pas les ensembles pluripolaires. La mesure $\tilde{\mu}$ est invariante par g et ne charge pas les ensembles pluripolaires. Par conséquent, il existe une constante $c > 0$ telle que $\mu = c\tilde{\mu}$. On en déduit que $\mu^* = c\Pi^*(m)$.

b. On choisit $w_1 \in J^*$ et $w_2 \in J^*$ tels que $f(\varphi(w_1)) = \varphi(w_2)$. On peut supposer que w_1, w_2 n'appartiennent pas à \mathcal{C}_φ et $\varphi(w_1)$ n'appartient pas à \mathcal{C}_f . Fixons des petits voisinages W_1, U_1, W_2, U_2 de $w_1, \varphi(w_1), w_2$ et $\varphi(w_2)$ tels que φ réalise un biholomorphisme entre W_1 (resp W_2) et U_1 (resp. U_2) et f réalise un biholomorphisme entre U_1 et U_2 . Posons $\Lambda_f := (\varphi|_{W_2})^{-1} \circ (f|_{U_1}) \circ (\varphi|_{W_1})$. On a $f \circ \varphi = \varphi \circ \Lambda_f$. Comme $f(J) = J$, on a $\Lambda(J^* \cap W_1) = J^* \cap W_2$. D'après le lemme 3.1, $\Lambda_f \in \mathcal{G}_4$. Par prolongement analytique $f \circ \varphi = \varphi \circ \Lambda_f$ sur \mathbb{C}^k . On en déduit que $g \circ \varphi = \varphi \circ \Lambda_f^n$ car $g = f^n$. Ceci montre que $\Lambda \circ \Lambda_f^{-n}$ préserve les fibres de φ . Il est donc un élément de \mathcal{A} et ainsi sa partie linéaire est de déterminant 1. Par conséquent, $\det \Lambda_f^n = \det \Lambda = d_g^{(k+1)/2} = d^{n(k+1)/2}$. D'où $\det \Lambda_f = d^{(k+1)/2}$. □

4 Fibration invariante

Observons que Λ_f préserve la fibration $\{z' = \text{const}\}$. On montrera que l'image de cette fibration par φ est une fibration de droites complexes passant par un point. Cette fibration est donc invariante par f et ceci impliquera que f est homogène.

Pour la suite, on note $L := \mathbb{P}^k \setminus \mathbb{C}^k$ l'hyperplan à l'infini. Pour tout $u \in \mathbb{C}^{k-1}$, on note $\mathcal{D}_u := \{z \in \mathbb{C}^k, z' = u\}$, $\mathcal{D}_u^+ := \{z \in \mathcal{D}, \text{Im} z_k \geq \|u\|^2\}$, $\mathcal{D}_u^- := \{z \in \mathcal{D}, \text{Im} z_k \leq \|u\|^2\}$ et $l_u := \{z \in \mathcal{D}, \text{Im} z_k = \|u\|^2\}$.

Rappelons la version suivante du principe de Phragmén-Lindelöf qui sera utilisée dans ce paragraphe:

Lemme 4.1 [9] *Soit $v \geq 0$ une fonction continue sous-harmonique définie sur le demi-plan $\mathcal{D}^- := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im} z \leq 0\}$ et nulle sur \mathbb{R} . Supposons qu'il existe un nombre réel $\lambda > 1$ tel que $v(\lambda z) = \lambda v(z)$ pour tout $z \in \mathcal{D}^-$. Alors $v(z) = -c \text{Im} z$ où $c \geq 0$ est une constante.*

Proposition 4.2 *La fonction $G^*(z)$ est égale à $\max(0, c'(\|z'\|^2 - \operatorname{Im} z_k))$ où $c' > 0$ est une constante. Par conséquent, les variétés complexes $\Sigma \subset \{G^* \neq 0\}$ sur lesquelles G^* est pluriharmonique sont des ouverts des droites complexes \mathcal{D}_u .*

Preuve— D'après la proposition 2.6, si $\operatorname{Im} z_k \geq \|z'\|^2$ on a $G^*(z', z_k) = 0$. Il reste à traiter le cas où $\operatorname{Im} z_k \leq \|z'\|^2$.

D'après le lemme 4.1, il existe une constante $c' \geq 0$ telle que $G^*(0, z_k) = -c' \operatorname{Im} z_k$ lorsque $\operatorname{Im} z_k \leq 0$. On va montrer que $G^*(z', z_k) = c'(\|z'\|^2 - \operatorname{Im} z_k)$ pour $\operatorname{Im} z_k \leq \|z'\|^2$. Comme G^* est continue, il suffit de le montrer pour une famille dense de z' . Soient \mathcal{B}_0 défini dans le corollaire 3.5 et $w = (u, v) \in \mathcal{B}_0$. Alors il existe $s \geq 0$ et $\tau \in \mathcal{A}$ tels que $w = \Lambda^{-s} \circ \tau(0)$. Supposons que $\operatorname{Im} z_k \leq \|u\|^2$. Les applications τ et $\sigma_{1/d_g} \circ \Lambda$ préservant les variétés $\{\operatorname{Im} z_k - \|z'\|^2 = \text{const}\}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\tau^{-1} \circ \Lambda^s(u, z_k) = (0, x + i(d_g)^s(\operatorname{Im} z_k - \|z'\|^2))$. D'autre part $G^* \circ \Lambda = d_g G^*$ et $G^* \circ \tau = G^*$. On obtient

$$G^*(u, z_k) = (d_g)^{-s} G^*(0, x + i(d_g)^s(\operatorname{Im} z_k - \|z'\|^2)) = -c'(\operatorname{Im} z_k - \|z'\|^2).$$

Ceci est valable pour tout $w = (u, v) \in \mathcal{B}_0$. D'après le corollaire 3.5, \mathcal{B}_0 est dense dans J^* . D'où $G^*(z', z_k) = c'(\|z'\|^2 - \operatorname{Im} z_k)$ pour tout $\operatorname{Im} z_k \leq \|z'\|^2$. La fonction G^* est positive ou nulle et non identiquement nulle. D'où $c' > 0$. \square

Lemme 4.3 *Soit $u \in \mathbb{C}^{k-1}$. Supposons que la restriction de φ sur \mathcal{D}_u n'est pas injective. Alors le groupe $\mathcal{A}_u := \mathcal{A}|_{\mathcal{D}_u}$ agit transitivement sur les fibres de $\varphi|_{\mathcal{D}_u}$. De plus, il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que*

$$\mathcal{A}_u = \{(u, z_k) \mapsto (u, z_k + n\alpha) \text{ avec } n \in \mathbb{Z}\}.$$

Preuve— Montrons d'abord que \mathcal{A}_u contient un élément différent de l'identité. Soient $w_1, w_2 \in \mathcal{D}_u$ vérifiant $\varphi(w_1) = \varphi(w_2)$. D'après la proposition 3.4, il existe $\tau \in \mathcal{A}$ tel que $\tau(w_1) = \tau(w_2)$ et $w_1 \neq w_2$. Comme $\tau \in \mathcal{A} \subset \mathcal{G}_3$, τ préserve la fibration $\{z' = \text{const}\}$. Par conséquent, τ préserve la droite \mathcal{D}_u qui contient w_1 et w_2 . On en déduit que \mathcal{A}_u contient $\tau|_{\mathcal{D}_u}$ qui est différent de l'identité car $\tau(w_1) = w_2 \neq w_1$.

Ce raisonnement implique également que \mathcal{A}_u agit transitivement sur les fibres de $\varphi|_{\mathcal{D}_u}$ car \mathcal{A} agit transitivement sur les fibres de φ .

Comme \mathcal{A} est un sous-groupe discret de \mathcal{G}_3 , le groupe \mathcal{A}_u est un groupe discret d'isométries complexe de \mathcal{D}_u . Le fait que J^* est invariant par \mathcal{A}

implique que \mathcal{A}_u préserve la droite réelle $l_u := \mathcal{D}_u \cap J^* = \{z' = u \text{ et } \operatorname{Im} z_k = \|u\|^2\}$. Soit $\tau \in \mathcal{A}_u$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\tau(u, z_k) = (u, \pm z_k + x)$. Montrons que $\tau(u, z_k) \neq (u, -z_k + x)$. Supposons que c'est le cas. Alors comme $G^* \circ \tau = G^*$, la proposition 4.2 entraîne $c' = 0$ ce qui est impossible.

Alors les éléments de \mathcal{A}_u sont du type $(u, z_k) \mapsto (u, z_k + x)$. Comme c'est un groupe discret, il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\mathcal{A}_u = \{(u, z_k) \mapsto (u, z_k + n\alpha) \text{ avec } n \in \mathbb{Z}\}.$$

□

On dit que $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^k$ est une *courbe holomorphe immergée* s'il existe une surface de Riemann S et une application holomorphe non constante ψ de S dans \mathbb{P}^k telles que $\mathcal{C} = \psi(S)$.

Lemme 4.4 *Soient $u \in \mathbb{C}^{k-1}$ et $\omega \in L$. Supposons que l'ensemble $\mathcal{C} := \varphi(\mathcal{D}_u) \cup \{\omega\}$ est une courbe holomorphe immergée dans \mathbb{P}^k . Supposons aussi qu'en ω au moins une composante de \mathcal{C} coupe L transversalement. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{C}^k$ tels que $\varphi(u, z_k) = \exp(2\pi i z_k / \alpha) \nu_1 + \nu_2$. En particulier, $\varphi(\mathcal{D}_u)$ est contenue dans une droite complexe.*

Preuve— Montrons d'abord que $\varphi|_{\mathcal{D}_u}$ n'est pas injective. Supposons que cette application soit injective. Alors $\varphi(\mathcal{D}_u)$ est un \mathbb{C} immergé dans \mathbb{C}^k . Par hypothèse, $\varphi(\mathcal{D}_u) \cup \{\omega\}$ est une courbe holomorphe immergée dans \mathbb{P}^k . Cette courbe est donc un \mathbb{P}^1 . Par conséquent, $\varphi(u, z_k)$ tend vers ω quand $z_k \rightarrow \infty$. C'est contradiction car l'image de \mathcal{D}_u^+ par φ est contenue dans le compact $\{G = 0\}$ de \mathbb{C}^k .

On note α le nombre réel positif défini dans le lemme 4.3. Soit $\Psi : \mathcal{D}_u \rightarrow \mathbb{C}^*$ définie par $\Psi(u, z_k) := \exp(2i\pi z_k / \alpha)$. Alors il existe une application holomorphe injective $\psi : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^k$ telle que $\varphi = \psi \circ \Psi$. Posons $\tilde{G} := G \circ \psi$. On a $G^* = \tilde{G} \circ \Psi$ et d'après la proposition 4.2

$$\tilde{G}(\zeta) = \max \left(0, c' \|u\|^2 + \frac{c' \alpha}{2\pi} \log |\zeta| \right)$$

pour tout $\zeta \in \mathbb{C}^*$. On sait $\{G = 0\}$ est un compact de \mathbb{C}^k . Par conséquent, ψ est bornée au voisinage de 0. Elle se prolonge holomorphiquement en une application de \mathbb{C} dans \mathbb{C}^k . Quand z tend vers l'infini, la fonction G a une croissance logarithmique. Ceci implique que $\psi(\zeta)$ a une croissance

polynomiale quand $\zeta \rightarrow \infty$. Par suite, $\overline{\varphi(\mathcal{D}_u)}$ est une courbe algébrique qui coupe L en un seul point. Par hypothèse, ce point doit être ω et l'intersection de la courbe algébrique avec L est transversale. Cette courbe est donc une droite projective.

Comme ψ est injective, elle est une application polynomiale de degré 1. Soient $\nu_1 \in \mathbb{C}^k$ et $\nu_2 \in \mathbb{C}^k$ tels que $\psi(\zeta) = \nu_1 \zeta + \nu_2$. Alors $\varphi(0, z_k) = \exp(2i\pi z_k/\alpha) \nu_1 + \nu_2$.

□

Proposition 4.5 *Il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\nu_2 \in \mathbb{C}^k$ et une application holomorphe $\nu_1 : \mathbb{C}^{k-1} \rightarrow \mathbb{C}^k$ tels que $\varphi(z', z_k) = \nu_1(z') \exp(2i\pi z_k/\alpha) + \nu_2$.*

Preuve— La restriction de f à L est une application holomorphe de degré $d \geq 2$. Il existe donc un point $\omega \in L$ qui est périodique répulsif pour $f|_L$. On peut supposer que c'est un point fixe répulsif de $g|_L$. Alors en ω , g possède $k-1$ valeurs propres de module supérieur à 1 et une valeur propre nulle. Soit

$$V := \{z \in \mathbb{P}^k, \lim_{s \rightarrow \infty} g^s(z) = \omega\}$$

la variété stable de g en ω [16, p.27]. C'est une courbe holomorphe immergée dans \mathbb{P}^k qui coupe L transversalement en ω . Montrons que G est harmonique sur V . Notons $[w_1 : \dots : w_k]$ les coordonnées homogènes de w dans L . Sans nuire à la généralité, on suppose que $w_k = 1$. Soit $z \in V$. Notons $g_{s,m}(z)$ la m -ième coordonnée de $g^s(z)$. Alors $\lim_{s \rightarrow \infty} g^s(z) = w$ et $\lim_{s \rightarrow \infty} g_{s,m}(z)/g_{s,k}(z) = w_m$ pour tout $z \in V$ et tout m . On a

$$\begin{aligned} G(z) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{(d_g)^s} \log \|g^s(z)\| \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{(d_g)^s} \log |g_{s,k}(z)| + \frac{1}{2(d_g)^s} \log \sum_{m=1}^k \left| \frac{g_{s,m}(z)}{g_{s,k}(z)} \right|^2 \end{aligned}$$

Le second terme de la dernière expression tend vers 0. Le premier terme tend vers une fonction harmonique car il est harmonique. Ceci montre que G est harmonique sur V .

D'après la proposition 4.2, il existe $\xi \in \mathbb{C}^{k-1}$ tel que $V \subset \varphi(\mathcal{D}_\xi)$. D'après le lemme 4.4, $\varphi(\mathcal{D}_\xi)$ est une droite complexe.

Soit Σ l'ensemble des $u \in \mathbb{C}^{k-1}$ tels que \mathcal{D}_u vérifie $\Lambda^m(\mathcal{D}_u) = \tau(\mathcal{D}_\xi)$ pour un $m \geq 0$ et un $\tau \in \mathcal{A}$. D'après le corollaire 3.5, cet ensemble est dense dans

\mathbb{C}^{k-1} . Pour un tel u , $g^m(\varphi(\mathcal{D}_u))$ est égal à $\varphi(\mathcal{D}_\xi)$ qui est contenu dans une droite complexe. Par conséquent, $\overline{\varphi(\mathcal{D}_u)}$ est une courbe algébrique qui coupe L transversalement. D'après le lemme 4.4, c'est une droite projective. Alors pour tout $u \in \Sigma$, il existe $\alpha(u) \in \mathbb{R}^+$, $\nu_1(u) \in \mathbb{C}^k$ et $\nu_2(u) \in \mathbb{C}^k$ tels que $\varphi(u, z_k) = \exp(2i\pi z_k/\alpha(u))\nu_1(u) + \nu_2(u)$.

L'application φ étant holomorphe, en prenant $z_k = 0, 1, -1$, on montre facilement que $\exp(1/\alpha(u))$, $\nu_1(u)$ et $\nu_2(u)$ dépendent holomorphiquement de u . Comme $\alpha(u)$ prend des valeurs réelles dans une famille dense de u , elle est constante. On obtient des formules explicites de $\nu_1(u)$ et $\nu_2(u)$ en fonction de φ qui, par continuité, impliquent que $\varphi(u, z_k) = \nu_1(u) \exp(2i\pi z_k/\alpha) + \nu_2(u)$ pour tout u . Comme G^* est nulle sur $\{\text{Im} z_k \geq \|z'\|^2\}$, G doit s'annuler au point $\nu_2(u) = \lim_{\text{Im} z_k \rightarrow +\infty} \varphi(u, z_k)$. Par conséquent, $\nu_2(u)$ est une application holomorphe de \mathbb{C}^{k-1} à l'image dans le compact $\{G = 0\}$ de \mathbb{C}^k . D'après le théorème de Liouville, elle doit être constante. \square

Preuve du théorème 1.3— Quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées de \mathbb{C}^k , on peut supposer $\nu_2 = 0$. L'application Λ_f préserve la fibration $\{z' = \text{const}\}$. D'après la proposition 4.5, f préserve la fibration des droites passant par 0. Elle est donc une application homogène.

Notons \mathbb{P}^{k-1} l'ensemble des droites complexes passant par 0 que l'on peut identifier avec l'hyperplan à l'infini de \mathbb{C}^k . L'application f induit un endomorphisme holomorphe \widehat{f} de \mathbb{P}^{k-1} . Il reste à prouver que \widehat{f} est de Lattès. On définit l'application $\widehat{\varphi}$ de \mathbb{C}^{k-1} dans \mathbb{P}^{k-1} par $z' \mapsto [\nu_1(z')]$. Notons $\widehat{\mathcal{A}}$ la restriction des actions de \mathcal{A} sur la famille de droites $\{\mathcal{D}_u\}_{u \in \mathbb{C}^{k-1}}$ et $\widehat{\Lambda}_f$ la restriction de l'action de Λ_f sur cette famille de droites. On a $\widehat{f} \circ \widehat{\varphi} = \widehat{\varphi} \circ \widehat{\Lambda}_f$ car $f \circ \varphi = \varphi \circ \Lambda_f$. D'après la proposition 3.4, $\widehat{\mathcal{A}}$ est un groupe d'isométries co-compact qui agit transitivement sur les fibres de $\widehat{\varphi}$. Par définition, \widehat{f} est de Lattès. On en déduit que la restriction de f à L est aussi une application de Lattès. \square

Preuve du corollaire 1.5— Soit F un relevé polynomial de f . Soient

$$G_f(z) := \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{d^s} \log \|F^s(z)\|$$

la fonction de Green de f et $G^+(z) := \max(0, G_f(z))$ la fonction de Green de F . Notons μ_F la mesure d'équilibre de F et $\pi : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^k$ est la projection canonique.

Comme le courant T de f est de classe $\mathcal{C}^{2+\epsilon}$ et est strictement positif dans un ouvert U , la fonction G_f est de classe $\mathcal{C}^{2+\epsilon}$ dans $\pi^{-1}(U)$. En particulier, $\{G_f = 0\} \cap \pi^{-1}(U)$ est une hypersurface $\mathcal{C}^{2+\epsilon}$ strictement pseudoconvexe. Comme $G_f(\lambda z) = \log |\lambda| + G_f(z)$, la fonction G_f est harmonique sur toute droite complexe passant par 0. On en déduit que dans $\pi^{-1}(U)$ le support de $\mu_F = (\mathrm{dd}^c G^+)^{k+1}$ est égale à $\{G_f = 0\}$. D'après le théorème 1.3 appliqué à F , la restriction de F à l'infini est une application de Lattès. Ceci implique que f est également une application de Lattès.

References

- [1] *H. Alexander*, Holomorphic Mappings from the Ball and Polydisc, *Math. Ann.*, **209** (1974), 249-256.
- [2] *E. Bedford and J. Smillie*, External rays in dynamics of polynomial automorphisms of \mathbb{C}^2 , *Contemporary Mathematics*, **222** (1999), 41-79.
- [3] *F. Berteloot, J.J. Loeb*, Spherical hypersurfaces and Lattès rational maps, *J. Math. Pures Appl.*, **77** (1998), 655-666.
- [4] *F. Berteloot, J.J. Loeb*, Une caractérisation des exemples de Lattès de \mathbb{P}^k , à paraître dans *Bull. S.M.F.*
- [5] *A. Boggess*, CR Manifolds and the Tangential Cauchy-Riemann Complex, *CRC Press*, 1991.
- [6] *J.Y. Briend et J. Duval*, Exposants de Liapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de \mathbb{CP}^k , *Acta Math.*, **182** (1999), 143-157.
- [7] *J.Y. Briend et J. Duval*, Propriétés ergodiques des endomorphismes de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, *Prépublication*.
- [8] *T.C. Dinh*, Sur les endomorphismes polynomiaux permutables de \mathbb{C}^2 , *Prépublication*, <http://xxx.arXiv.org/abs/math.CV/9912024>, à paraître dans les *Ann. Ins. Fourier*.
- [9] *T.C. Dinh et N. Sibony*, Sur les endomorphismes permutables de \mathbb{P}^k , *Prépublication*, <http://xxx.arXiv.org/abs/math.CV/0007017>.

- [10] *A.E. Eremenko*, On some functional equations connected with iteration of rational function, *Leningrad. Math. J.*, **1** (1990), No. 4, 905-919.
- [11] *P. Fatou*, Sur l'itération analytique et les substitutions permutables, *J. Math.*, **2** (1923), 343.
- [12] *J.E. Fornæss*, Dynamics in several complex variables, *CBMS*, vol. **81**, A.M.S. Providence RI (1996).
- [13] *G. Julia*, Mémoire sur la permutabilité des fractions rationnelles, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **39** (1922), 131-215.
- [14] *S. Lattès*, Sur l'itération des substitutions rationnelles et les fonctions rationnelles, *C.R.A.S. Paris*, **166** (1918), 26-28.
- [15] *J.F. Ritt*, Permutable rational functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **25** (1923), 399-448.
- [16] *D. Ruelle*, Elements of differentiable dynamics and bifurcation theory, *Academic Press*, 1989.
- [17] *W. Schwick*, Normality criteria for families of meromorphic functions, *J. Anal. Math.*, **52** (1989), 241-289.
- [18] *N. Sibony*, Dynamique des applications rationnelles de \mathbb{P}^k , *Panoramas et Synthèses*, **8** (1999), 97-185.
- [19] *N. Steinmetz*, Rational Iteration, *Grutyer Studies in Math.* **16** (1993).
- [20] *S. Sternberg*, Local contractions and a theorem of Poincaré, *Amer. J. Math.* **79** (1957), 809-823.
- [21] *W. Thurston*, On the combinatorics of iterated rational maps, *Princeton Univ., Princeton, N.J.* (1985).
- [22] *J.M. Trépreau*, Sur le prolongement holomorphe des fonctions C-R définies sur une hypersurface réelle de classe \mathcal{C}^2 dans \mathbb{C}^n , *Invent. math.*, **83** (1986), 583-592.

Tien-Cuong Dinh
 Mathématique - Bâtiment 425
 UMR 8628, Université Paris-Sud

91405 ORSAY Cedex (France)
TienCuong.Dinh@math.u-psud.fr